

§4.1 第 1 课时 直线的方向向量与直线的向量表示

【学习目标】

- 1.能用向量语言表述直线.
- 2.理解直线的方向向量，并会求直线的方向向量.

【重点难点】

重点：能用向量语言表述直线.

难点：解直线的方向向量，并会求直线的方向向量.

【导学流程】

一、情境引入

牌楼与牌坊类似，是中国传统建筑之一，最早见于周朝．在园林、寺观、宫苑、陵墓和街道常有建造．旧时牌楼主要有木、石、木石、砖木、琉璃几种，多设于要道口．牌楼中有一种有柱门形构筑物，一般较高大．如图，牌楼的柱子与地面是垂直的，如果牌楼上部的下边线与柱子垂直，我们就能知道下边线与地面平行．这是为什么呢？



二、探究新知

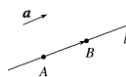
◇探究一 直线的方向向量

问题 1 在空间中，如何用向量表示空间中的一个点？

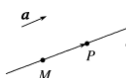
问题 2 在空间中，怎样可以确定一条直线？

【知识梳理】

1. 设点 A, B 是直线 l 上不重合的任意两点，称 \overrightarrow{AB} 为直线 l 的方向向量.



2. 已知点 M 是直线 l 上的一点，非零向量 a 是直线 l 的一个方向向量，那么对于直线 l 上的任意一点 P ，一定存在实数 t ，使得 $\overrightarrow{MP} = ta$. 反之，由几何知识不难确定，满足上式的点 P 一定在直线 l 上，因此，我们把这个式子称为直线 l 的向量表示.

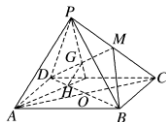


注意点：(1) 空间中，一个向量成为直线 l 的方向向量，必须具备两个条件：①是非零向量；②向量所在的直线与 l 平行或重合.

(2)与直线 l 平行的任意非零向量 \mathbf{a} 都是直线的方向向量, 且直线 l 的方向向量有无数个.

例1 在三棱锥 $P-ABC$ 中, E, O, G 分别为 PA, AC, OC 的中点. 过点 G 求作直线 EO 的一个方向向量.

跟踪训练1 如图所示, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是平行四边形, O 是 AC 与 BD 的交点, M 是 PC 的中点, 在 DM 上取一点 G , 过点 G 和 AP 作平面交平面 BDM 于 GH . 求证: \vec{AP} 是直线 GH 的一个方向向量.



◇探究二 直线方向向量的简单应用

例2 已知在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中, 点 $A(4,1,3), B(2, -5,1)$, C 为线段 AB 上一点, 且 $3|\vec{AC}|=|\vec{AB}|$, 则点 C 的坐标是()

- A. $(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ B. $(\frac{3}{8}, -3, 2)$ C. $(\frac{10}{3}, -1, \frac{7}{3})$ D. $(\frac{5}{3}, -\frac{7}{3}, \frac{3}{4})$

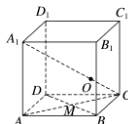
跟踪训练2 已知空间三点 $O(0,0,0), A(-1,1,0), B(0, 1,1)$, 在直线 OA 上有一点 H 满足 $BH \perp OA$, 则点 H 的坐标为()

- A. $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$ B. $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ C. $(-2,2,0)$ D. $(2, -2,0)$

◇探究三 点在直线上的充要条件

问题3 在空间中, 如何证明 A, B, P 三点共线?

例3 如图所示, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, O 为 A_1C 上一点, 且 $\vec{A_1O} = \frac{2}{3}\vec{A_1C}$, BD 与 AC 交于点 M . 求证: C_1, O, M 三点共线.



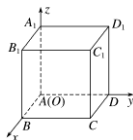
跟踪训练3 (1)在四面体 $OABC$ 中, 点 M, N 分别为 OA, BC 的中点, 若 $\vec{OG} = \frac{1}{3}\vec{OA} + x\vec{OB} + y\vec{OC}$, 且 G, M, N 三点共线, 则 $x+y$ 等于()

- A. $-\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $-\frac{2}{3}$

(2)已知点 $A(2,1,3), B(-1,3,1)$, 直线 AB 与平面 yOz 的交点 C 的坐标为_____.

三、随堂演练

1. (多选)若 $M(1,0,-1)$, $N(2,1,2)$ 在直线 l 上, 则直线 l 的方向向量是()
- A. $(2,2,6)$ B. $(1,1,3)$ C. $(3,1,1)$ D. $(-3,0,1)$
2. 已知 $A(1,-2,0)$ 和向量 $\mathbf{a}=(-3,4,12)$, 且 $\vec{AB}=2\mathbf{a}$, 则点 B 的坐标为()
- A. $(-7,10,24)$ B. $(7,-10,-24)$ C. $(-6,8,24)$ D. $(-5,6,24)$
3. 在如图所示的坐标系中, $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为正方体, 棱长为 1, 则直线 DD_1 的一个方向向量为_____, 直线 BC_1 的一个方向向量为_____.



4. 已知 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 是空间两个不共线的向量, $\vec{AB}=2\mathbf{e}_1+k\mathbf{e}_2$, $\vec{CB}=\mathbf{e}_1+3\mathbf{e}_2$, $\vec{CD}=2\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2$, 且 A, B, D 三点共线, 则 k 的值为_____.

四、课堂小结

1. 知识清单: (1)直线的方向向量及应用. (2)直线的向量表示. (3)点在直线上的充要条件.
2. 方法归纳: 转化与化归. 3. 常见误区: 对直线的方向向量表示理解不到位而致误.

五、布置作业 (课时对点练)

基础巩固

1. 已知直线 l 的一个方向向量 $\mathbf{m}=(2,-1,3)$, 且直线 l 过 $A(0,y,3)$ 和 $B(-1,2,z)$ 两点, 则 $y-z$ 等于()
- A. 0 B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. 3
2. 已知向量 $\mathbf{a}=(2,-1,3)$ 和 $\mathbf{b}=(-4,2x^2,6x)$ 都是直线 l 的方向向量, 则 x 的值是()
- A. -1 B. 1 或 -1 C. -3 D. 1
3. 已知空间向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} , 且 $\vec{AB}=\mathbf{a}+2\mathbf{b}$, $\vec{BC}=-5\mathbf{a}+6\mathbf{b}$, $\vec{CD}=7\mathbf{a}-2\mathbf{b}$, 则一定共线的三点是()
- A. A, B, D B. A, B, C C. B, C, D D. A, C, D
4. 已知空间中两条不同的直线 m, n , 其方向向量分别为 \mathbf{a}, \mathbf{b} , 则 “ $\forall \lambda \in \mathbf{R}, \mathbf{a} \neq \lambda \mathbf{b}$ ” 是 “直线 m, n 相交” 的()
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
5. 从点 $A(2,-1,7)$ 沿向量 $\mathbf{a}=(8,9,-12)$ 的方向取线段长 $|\vec{AB}|=34$, 则 B 点的坐标为()
- A. $(18,17,-17)$ B. $(-14,-19,17)$ C. $(6, \frac{7}{2}, 1)$ D. $(-2, -\frac{11}{2}, 13)$
6. (多选)已知直线 l_1 的一个方向向量 $\mathbf{a}=(2,4,x)$, 直线 l_2 的一个方向向量 $\mathbf{b}=(2,y,2)$, 若 $|\mathbf{a}|$

$=6$, 且 $l_1 \perp l_2$, 则 $x+y$ 的值是()

- A. 0 B. 3 或 -1 C. -3 D. 1

7. 已知点 $A(3,3,-5)$, $B(2,-3,1)$, C 为线段 AB 上一点, 且 $\vec{AC} = \frac{2}{3}\vec{AB}$, 则点 C 的坐标为_____.

8. 已知向量 $\mathbf{a}=(1,2,3)$, $\mathbf{b}=(x, x^2+y-2, y)$, 并且 \mathbf{a}, \mathbf{b} 同向, 则 $x+y$ 的值为_____.

9. 已知点 $A(1,-2,0)$ 和向量 $\mathbf{a}=(-1,2,3)$, 求点 B 的坐标, 使向量 \vec{AB} 与 \mathbf{a} 同向, 且 $|\vec{AB}| = 2\sqrt{14}$.

10. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $ABCD$ 是平行四边形, E 在 PC 上, 且 $CE=3EP$, 设 $\vec{AB}=\mathbf{a}$, $\vec{AD}=\mathbf{b}$, $\vec{AP}=\mathbf{c}$, 以 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ 为空间的一组基, 求直线 AE 的一个方向向量.

综合运用

11. (多选) 已知 $M(1,2,3)$, $N(2,3,4)$, $P(-1,2,-3)$, 若 $|\vec{PQ}|=3|\vec{MN}|$ 且 $\vec{PQ} \parallel \vec{MN}$, 则 Q 点的坐标为()

- A. $(-4, -1, -6)$ B. $(2,5,0)$ C. $(3,4,1)$ D. $(-3, -2, -5)$

12. 若 $A(m+1, n-1, 3)$, $B(2m, n, m-2n)$, $C(m+3, n-3, 9)$ 三点共线, 则 $m+n$ 的值为()

- A. 0 B. -1 C. 1 D. -2

13. 已知空间三点 $A(0,2,3)$, $B(2,5,2)$, $C(-2,3,6)$, 则以 AB, AD 为邻边的平行四边形的顶点 D 的坐标为_____, 过 B 点作 AC 的垂线, 垂足为 M , 则 M 点的坐标为_____.

14. 如图 1 所示, 在三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB=2A_1B_1$, $B_1D=2DC_1$, $CE=EC_1$, 设 $\vec{AB}=\mathbf{a}$, $\vec{AC}=\mathbf{b}$, $\vec{AA_1}=\mathbf{c}$, 以 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ 为空间的一组基, 则直线 AE, AD 的一个方向向量分别为_____. (答案不唯一)

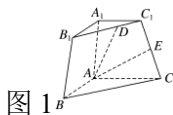


图 1

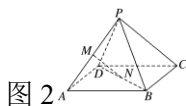


图 2

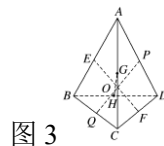


图 3

拓展探究

15. 如图 2 所示, 在正四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA=AB$, 点 M 为 PA 的中点, $\vec{BD}=\lambda\vec{BN}$. 若 $MN \perp AD$, 则实数 $\lambda=$ _____.

16. 如图 3 所示, 在四面体 $ABCD$ 中, E, F, G, H, P, Q 分别是所在棱的中点.

求证: EF, GH, PQ 相交于一点 O , 且 O 为它们的中点.